ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Examen Final 23/07/2024

APELLIDO DEL ALUMNO: .... NOMBRE: ....

CORRIGIÓ: .... REVISÓ: ....

T1		T2		P1	P2	P3	P4	CALIFICACIÓN

***Todas las respuestas deben ser justificadas adecuadamente para ser tenidas en cuenta*.**
No resolver el examen en lápiz. Duración del examen: 2 horas
Condición de aprobación (6 puntos): tres ejercicios correctamente resueltos (uno de T1 o T2 y dos de P1, P2, P3 o P4).

T1) Indique si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. Fundamente correctamente la respuesta.

a. El flujo del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z)=(x+y,y+z,x+z)$ a través de la superficie S: $x^2+y^2+z^2-2z=0$ con $z\geq 1$, orientada con la normal de componente z positiva, es igual a $\frac{\pi}{2}$.

b. La ecuación del plano tangente a la superficie de ecuación $z=f(x,y)+x^2$ en el punto en (1,2,4) es $z=2x+2$ sabiendo que, f es una función de clase $C^2(R^2)$ y admite un valor máximo local 3 en el punto (1,2).

T2) **a**. Defina punto silla de un campo escalar $f\colon U\subset R^2\to R$.

b. Muestre que $f(x,y)=x^2\ln(y-5)$ admite en (x_0,y_0) =(0,6) un punto silla.

P1) Sea $f:R^2\to R$ dada por $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x.sen\,y}{y} & si \;\; y>0\\ xy & si\; y\leq 0\end{cases}$ Para cada $\check{v}\in R^2$ analice la existencia de las derivadas direccionales $f\,'((0,0),\check{v})$. Justifique la respuesta.

P2) Plantee la integral triple (sin calcular) que permite hallar del volumen del cuerpo definido por

$z\leq 4-x-y$, $2x+y\geq 4$ en el primer octante.

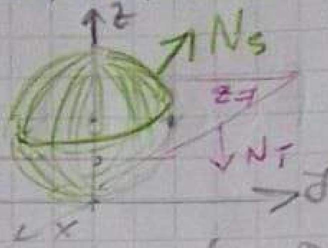
P3) Sea $g:R^3\to R$ una función de clase $C^2(R^3)$ y el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z)=(yz+2\,,g(x,y,z)\,,z)$. Si se sabe que la circulación de $\vec{F}$ a lo largo de la curva C parametrizada por $\vec{r}:[0,\pi]\to R^3$ / $\vec{r}(t)=(\cos t, sent, sent)$ es igual a 1, calcule el flujo del rotor de $\vec{F}$ a través de la porción del plano $S: y=z$, contenida en $x^2+y^2\leq 1$, $y\geq 0$ considerando la normal de componente z positiva. Grafique S y C.

P4) Determine la solución de la ecuación diferencial $(2y-4x^2)dx+xdy=0$ que pasa por el punto (1,1).

AM II | Final | 23-7-24

T1 Indicar si cada una de los sig. proposiciones es V o F

a) El flujo del campo vectorial $\bar{F}(x,y,z) = (x+y,\ y+z,\ x+z)$ a través de $S:\ x^2+y^2+z^2-2z=0$ con $z \geq 1$, orientada con la normal de componente z positiva, es igual a $\frac{\pi}{2}$



$S:\ x^2+y^2+(z-1)^2 = 1$, con $z \geq 1$

sea $T:\ x^2+y^2 \leq 1$, con $z=1 \rightarrow N=(0,0,-1)$

$\underbrace{S \cup T = S_T}$, S_T es sup frontera de W (una región de $\mathbb{R}^3$)

$$\boxed{\iint_S \bar{F}\,d\bar{s} + \iint_T \bar{F}\,d\bar{s} = \oiint_{S_T} \bar{F}\,d\bar{s}}$$

$\bar{F} = (P,Q,R) \in C^\infty \rightarrow \in C^1$ pues sus componentes son funciones polinómicas

Se cumplen las hip T. Gauss $\Rightarrow \oiint_{S_T} \bar{F}\,d\bar{s} = \iiint_W \operatorname{div}(\bar{F})\,dvol$

$\operatorname{div}\bar{F} = P'_x + Q'_y + R'_z = 1+1+1 = 3 \rightarrow \oiint_{S_T} \bar{F}\,d\bar{s} = 3 \underbrace{\iiint_W dvol}_{Vol\,W} = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 \cdot \frac{1}{2}$

$$\oiint_{S_T} \bar{F}\,d\bar{s} = 2\pi = \iint_S \bar{F}\,d\bar{s} + \underbrace{\iint_T \bar{F}\,d\bar{s}}_{-\pi}$$

$T: \bar{T}(x,y) = (x,y,1)$

$$\iint_T \bar{F}\,d\bar{s} = \iint_T (x+y,\ y+1,\ x+1)(0,0,-1)\,ds = \iint_T -x-1\,ds =$$

$\bar{F}\,\check{n}\,ds$

$$= -\underbrace{\iint_T x\,ds}_{0 \text{ (por la simetría)}} - \underbrace{\iint_T ds}_{\text{Área de } T} = -\pi r^2 = -\pi = \iint_T \bar{F}\,d\bar{s}$$

$$\boxed{\iint_S \bar{F}\,d\bar{s} = 3\pi} \neq \frac{\pi}{2} \quad \text{F}$$

T1 b) La ecuación del plano tangente a la sup. de ecuación $z = f(x,y) + x^2$ en el punto $(1,2,4)$ es $z = 2x+2$ sabiendo que f es una función de clase $C^2(\mathbb{R}^2)$ y admite un valor máximo local 3 en $(1,2)$

$$z = g(x,y) \quad , \quad g(x,y) = f(x,y) + x^2$$
$$\nabla g(x,y) = \nabla f(x,y) + (2x, 0)$$

$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ $\underbrace{\text{admite valor máximo local}}_{\boxed{\nabla f(1,2) = (0,0)}}$ $\underbrace{3 \text{ en } (1,2)}_{f(1,2) = 3}$

$$\nabla g(1,2) = (0,0) + (2,0) = (2,0) \rightarrow g'_x(1,2) = 2$$
$$g'_y(1,2) = 0$$

$$z = g(1,2) + \overset{2}{g'_x(1,2)}(x-1) + \underbrace{g'_y(1,2)}_{0}(y-2)$$

$$\hookrightarrow g(1,2) = f(1,2) + 1^2 = 3 + 1 = 4$$

$$z = 4 + 2x - 2 = \boxed{2x + 2 = z} \quad ✓ \quad \boxed{V}$$

T2 a) Definir punto silla de un campo escalar $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Punto silla: es un punto de una superficie en que el gradiente es nulo pero no es máximo ni mínimo local

Si P es punto crítico (punto en el que $\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$)

cuyo determinante de la matriz hessiana es negativo

b) Mostrar que $f(x,y) = x^2 \ln(y-5)$ admite, en $(x_0,y_0) = (0,6)$, es punto silla

f es diferenciable $\rightarrow$ hallo $(x,y) / \nabla f(x,y) = (0,0)$

$$\begin{cases} f'_x = 2x \ln(y-5) = 0 \longrightarrow x = 0 \ \vee \ y = 6 \Rightarrow (0,6) \text{ es P.C} \\ f'_y = \dfrac{x^2}{y-5} = 0 \longrightarrow x = 0 \ e \ y \neq 5 \end{cases}$$

Hallo el hessiano:

el criterio no decide

$$\left.\begin{array}{l} f''_{xx} = 2\ln(y-5) \\ f''_{xy} = f''_{yx} = \dfrac{2x}{y-5} \\ f''_{yy} = \dfrac{-2x^2}{(y-5)^2} \end{array}\right\} \quad Hf(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} \Rightarrow |Hf(0,6)| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Pero con $y = 6{,}01 \rightarrow f = 0{,}009\ldots > 0$

$x = 0{,}999 \quad y = 5{,}99 \rightarrow f = -0{,}01\ldots < 0$ } ± Seguro es punto silla

AM II | Final | 23-7-24 2/3

P1 Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \operatorname{sen}(y)}{y} & si\ y>0 \\ xy & si\ y \le 0 \end{cases}$

Para cada $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ analizar la existencia de las derivadas direccionales $f'((0,0),\vec{v})$. Justificar

$$f'((0,0),\vec{v}) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h\vec{v}) - \overset{0}{f(0,0)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(ha,hb)}{h} = \circledast$$

$\vec{v} = (a,b)$

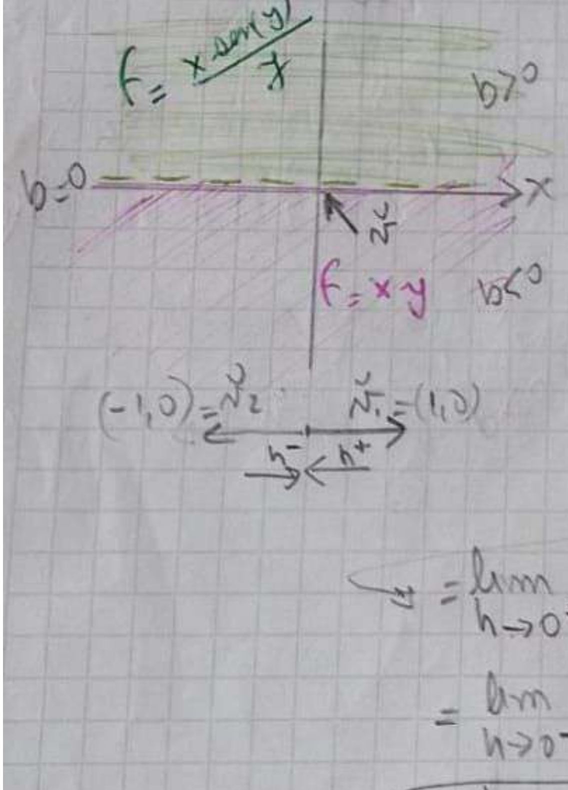
- si $b>0 \to \circledast = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\cancel{h}} \cancel{h} a \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(hb)}{hb}}_{\to 1} = a$

  $\to = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{\cancel{h}} \cdot \cancel{h} a h b = 0$ $\Big\} \neq$ $\boxed{\nexists \lim \text{ si } b>0}$

- si $b \le 0 \to \circledast = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\cancel{h}} \cdot \cancel{h} a h b = 0$

  $\to = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{\cancel{h}} \cdot \cancel{h} a \frac{\operatorname{sen}(hb)}{hb} = a$ (si $b \ne 0 \to 1$) $\Big\} \neq$

  $\nexists \lim$ si $b<0$



$\to$ si $b=0 \to \boxed{v_1 = (1,0) \quad , v_2 = (-1,0)}$

$$f'((0,0),(1,0)) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+(h,0)) - \overset{0}{f(0,0)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)}{h} \Rightarrow$$

$\to = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\cancel{h}} \cancel{h} a h b = 0$

$= \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{\cancel{h}} \cancel{h} a h b = 0$ $\Big\} = \checkmark$ $\exists \lim$ solo si $b=0$

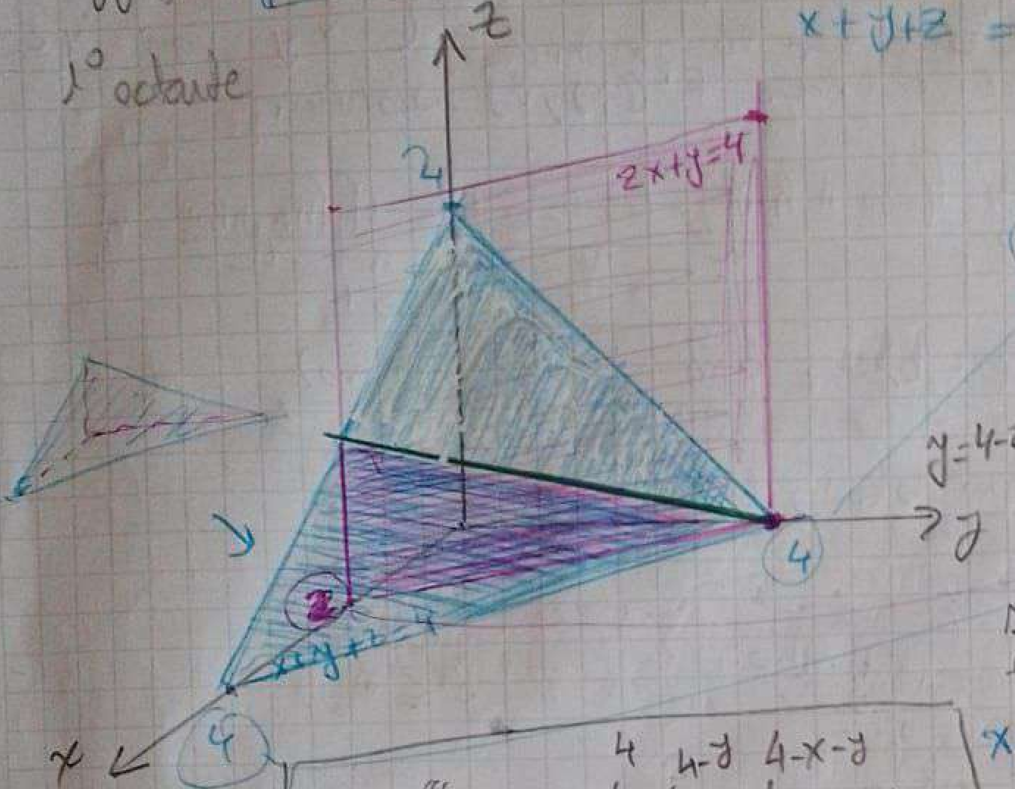
$$\boxed{f'((0,0),\vec{v}) = 0 \text{ si } b=0 \quad , \nexists f'((0,0),\vec{v}) \text{ si } b \ne 0}$$

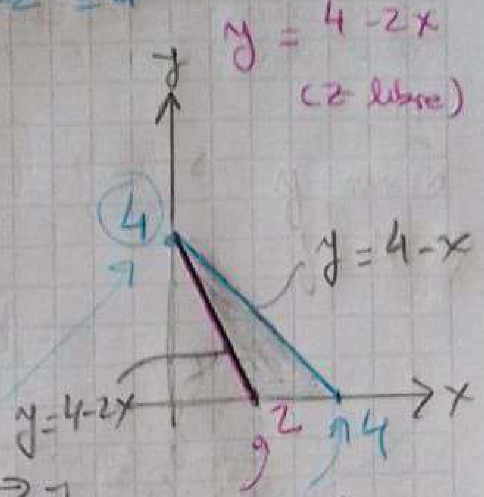
(P2) Plantear la integral triple (sin calcular) que permite hallar el volumen del cuerpo definido por:

W: $\boxed{z \leq 4-x-y}$, $\boxed{2x+y \geq 4}$ en el primer octante

1º octante

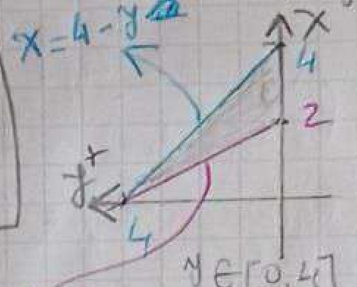
$x+y+z=4$





$$\boxed{A = \iiint_W dvol = \int_0^4 \int_{\frac{4-y}{2}}^{4-y} \int_0^{4-x-y} dz\,dx\,dy}$$

si lo veo así es suma de integrales



$y \in [0,4]$

$y = 4-2x$

$2x = 4-y$

$x = \frac{4-y}{2}$

Visto así es 1 integral

Otra forma

$$A = \iiint_W dvol = \int_0^2 \int_{4-2x}^{4-x} \int_0^{4-x-y} dz\,dy\,dx + \int_2^4 \int_0^{4-x} \int_0^{4-x-y} dz\,dy\,dx$$

AM II | Final | 23-7-24

3/3

(P3) Sea $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ una función de clase $C^2(\mathbb{R}^3)$ y el campo vectorial

$$\bar F(x\,y\,z) = (yz+z,\ g(x,y,z),\ z)$$

Si se sabe que la circulación de $\bar F$ a lo largo de la curva C parametrizada por:

cilindro $r=1$ $\quad y=z$

$$\vec r:[0,\pi]\to\mathbb{R}^3 \,/\, \bar r(t)=(\cos(t),\ \operatorname{sen}(t),\ \operatorname{sen}(t))$$

es igual a 1, calcular el flujo del rotor de $\vec F$ a través de la porción del plano $S: y=z$, contenida en $x^2+y^2\le 1$, $y\ge 0$ considerando la normal de componente z positiva

Graficar S y C

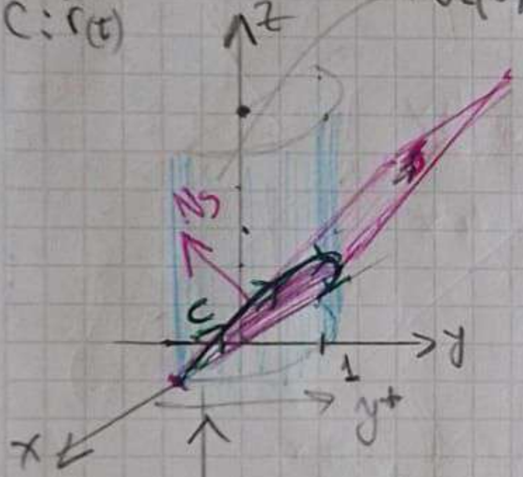
$\bar F \in C^2(\mathbb{R}^3)$ pues sus componentes son: 2 polinomios y una función $g\in C^2(\mathbb{R}^3)$

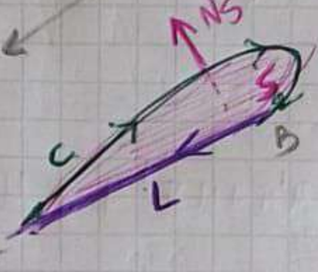
$\hookrightarrow \bar F\in C^1$ ✓

$-y-z=0$

$N_S=(0,-1,+1)$

$C: \bar r(t)$





$$\int_{C_{AB}} \bar F\, d\bar e = 1$$

$$\iint_S \operatorname{rot}(\bar F)\, d\bar\sigma = ?$$

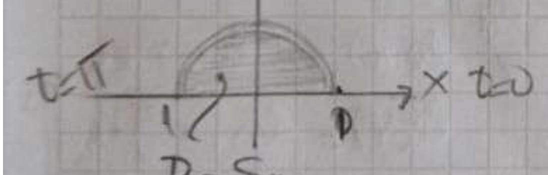
S es sup. orientable cuya frontera es C∪L

C∪L está orientada positivamente con N=(0,

F∈C¹

Se cumplen las hip. T Stokes ∴

$$\underbrace{\oint_{C\cup L} \bar F\, d\bar e}_{} = \iint_S \operatorname{rot}(\bar F)\, d\bar\sigma$$



$D = S_{xy}$

$$C\cup L \Rightarrow \oint_{C\cup L} \bar F\, d\bar e = \underbrace{\int_{C_{AB}} \bar F\, d\bar e}_{1} + \underbrace{\int_{L_{BA}} \bar F\, d\bar e}_{4}$$

$L:\ \beta(t)=(t,0,0) \quad t\in[-1,1]$

$\beta'(t)=(1,0,0)$

$$\int_{L_{BA}} \bar F\, d\bar e = \int_{-1}^{1} \bar F(\bar\beta(t))\,\bar\beta'(t)\, dt = \int_{-1}^{1} (2, g(t,0,0), 0)(1,0,0)\, dt = \int_{-1}^{1} 2\,dt = 4$$

$$\boxed{\iint_S \operatorname{rot}(\bar F)\, d\bar\sigma = 5}$$

(P4) Determinar la solución de la ecuación diferencial

$$(2y-4x^2)dx + x\,dy = 0$$

que pasa por el punto $(1,1)$

$$(2y-4x^2)dx = -x\,dy$$

$$\frac{4x^2-2y}{x} = \frac{dy}{dx} \quad y'$$

$$\underbrace{4x - 2y/x = y'}$$

$$y' + 2y/x = 4x$$

$y = u.v$

$y' = u'v + uv' \longrightarrow u'v + uv' + 2\frac{uv}{x} = 4x$

$$\underbrace{u'v + u(v' + 2v/x) = 4x}$$

$$\begin{cases} v' + \frac{2v}{x} = 0 \\ u'v = 4x \end{cases}$$

- $v' + 2v/x = 0 \rightarrow v' = -2\frac{v}{x} \rightarrow \frac{v'}{v} = -\frac{2}{x} \xrightarrow{\text{integramos a.m}} \ln(v) = -2\ln(x) + c$

$\ln(v) = \ln(x^{-2}) + c$

$v = k\,x^{-2}$ (tomo $k=1$)

$\boxed{v = x^{-2}}$

- $u'v = 4x$

$u' x^{-2} = 4x \rightarrow u' = 4x^3 \xrightarrow{\text{integro}} \boxed{u = x^4 + c} \quad c \in \mathbb{R}$

$y = u.v = (x^4+c)\cdot(x^{-2}) = x^2 + \frac{c}{x^2}$

pasa por $(1,1) \rightarrow \left.\begin{matrix} x=1 \\ y=1 \end{matrix}\right\} \quad 1 = 1^2 + \frac{c}{1^2} \rightarrow c=0 \rightarrow \boxed{y = x^2}$